УДК 968

Алымбаев А.Т., Булатаева В.В.
Восточный университет им. М.Кашгари-Барскани

О МЕТОДЕ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ ПОСТРОЕНИЯ ЦИКЛИЧЕСКИ ПРОГНОЗИРУЮЩИХ ФУНКЦИЙ

В статье на основе статистических данных, методом наименьших квадратов рассматривается задача построения циклически прогнозирующих функций. Определена оценка точности между статистическими и теоретическими данными. Для определения пригодности прогнозирующей функции построена карта контроля.

Макалада чектөөнүн квадратынын эң кичинесин тандоо ыкмасынын жардамы менен статистикалык түрдө берилген берилиштер үчүн мезгилдик болжолдоо функциясын тургузуу маселеси каралат. Статистикалык жана теориялык берилиштердин ортосундагы катанын чеги аныкталат. Болжолдоо функциясынын жарактуу экендигин аныкташ үчүн контролдоо картасы түзүлөт.

In the article on the basis of statistical data, a least-squares method is examine the task of construction of cyclic forecasting in functions. The estimation of exactness is certain between statistical and theoretical by data. For determination of fitness of forecasting function a control map is built.

Задача прогнозирования в экономике достаточно распространенная задача. По существу прогноз позволяет анализировать состояние экономики или отдельную его часть, формирует прогностические оценки при составлении краткосрочных и долгосрочных планов выпуска продукции производства.

Состояния рынка в большей степени зависит от спроса продукции, который носит характер постоянный, периодический (циклический), имеет тенденции к возрастанию или убыванию с циклическими составляющими, относительно времени.

Одним из способов определения прогностических оценок является построение прогнозирующих функций по некоторым статическим данным. Такого рода задача в математике называется задачей интерполирования функции, задачей приближения функции или задачей сглаживания таблично заданных функций.

Среди способов интерполирования наиболее распространен метод наименьших квадратов. Этот метод имеет различные плюсы и минусы с точки зрения их эффективности и точности.

Допустим, что поведение спроса носит циклический характер. Прогнозирующую функцию ищем в виде

$$y = a + c\cos\frac{2\pi}{N}x + d\sin\frac{2\pi}{N}x \tag{1}$$

где N - число периодов в одном цикле, определив параметры a,c,d из алгоритма наименьших квадратов, из условия минимума суммы квадратов отклонений

$$\Phi(a,c,d) = \sum_{i=1}^{n}\Delta_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\left[\left(a + c\cos\frac{2\pi}{N}x_i + d\sin\frac{2\pi}{N}x_i\right) - y_i\right]^2 \to \min . \tag{2}$$

Рассмотрим вариант построение алгоритма (1), который на наш взгляд носит методически более доступный и понятный характер.

Построим нормальную систему уравнений относительно параметров a,c,d:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Phi}{\partial a} = 2\sum\limits_{i=1}^{n}\left[a + c\cos\dfrac{2\pi}{N}x_i + d\sin\dfrac{2\pi}{N}x_i - y_i\right] = 0 \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial c} = 2\sum\limits_{i=1}^{n}\left[a + c\cos\dfrac{2\pi}{N}x_i + d\sin\dfrac{2\pi}{N}x_i - y_i\right] = \cos\dfrac{2\pi}{N}x_i = 0 \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial d} = 2\sum\limits_{i=1}^{n}\left[a + c\cos\dfrac{2\pi}{N}x_i + d\sin\dfrac{2\pi}{N}x_i - y_i\right] = \sin\dfrac{2\pi}{N}x_i = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Систему уравнений (3) можно записать в виде

$$\begin{cases} na + c\sum\limits_{i=1}^{n}\cos\dfrac{2\pi}{N}x_i + d\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\dfrac{2\pi}{N}x_i = \sum\limits_{i=1}^{n}y_i \\ a\sum\limits_{i=1}^{n}\cos\dfrac{2\pi}{N}x_i + c\sum\limits_{i=1}^{n}\cos^2\dfrac{2\pi}{N}x_i + d\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\dfrac{2\pi}{N}x_i\cos\dfrac{2\pi}{N}x_i = \sum\limits_{i=1}^{n}y_i\cos\dfrac{2\pi}{N}x_i \\ a\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\dfrac{2\pi}{N}x_i + c\sum\limits_{i=1}^{n}\cos\dfrac{2\pi}{N}x_i\sin\dfrac{2\pi}{N}x_i + d\sum\limits_{i=1}^{n}\sin^2\dfrac{2\pi}{N}x_i = \sum\limits_{i=1}^{n}y\sin\dfrac{2\pi}{N}x_i \end{cases} \tag{4}$$

Возможны два случая: 1) N не является целым числом, тогда параметры a,c,d находится решением систему уравнений (4). 2) N целое положительное число. Тогда найдется такое положительное число m, что $n = mN$.

Если $x_i = i(i = 1,2,3,...)$, то справедливы тождества

$$\sum_{i=1}^{n}\cos\frac{2\pi}{N}x_i = 0 : \sum_{i=1}^{n}\sin^2\frac{2\pi}{N}x_i = \frac{n}{2}; \sum_{i=1}^{n}\sin\frac{2\pi}{N}x_i = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n}\cos^2\frac{2\pi}{N}x_i = 0 : \sum_{i=1}^{n}\sin\frac{2\pi}{N}x_i\cos\frac{2\pi}{N}x_i = 0$$

На основании этих тождеств система (4) принимает вид

$$
\begin{cases}
na + 0 \cdot c + 0d = \sum_{i=1}^{n} y_i \\
0 \cdot a + \frac{n}{2} \cdot c + 0 \cdot d = \sum_{i=1}^{n} y_i \cos \frac{2\pi}{N} x_i \\
0 \cdot a + 0 \cdot c + \frac{n}{2} d = \sum_{i=1}^{n} y_i \sin \frac{2\pi}{N} x_i \\
\text{Решая систему (5) находим} \\
a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i, c = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i \cos \frac{2\pi}{N} x_i, d = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i \sin \frac{2\pi}{N} x_i
\end{cases} \tag{5}
$$

В качестве примера рассмотрим статистические показатели розничный торговли фирмы за один год (млн.долл.)

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y_i	70	82	85	91	105	125	98	89	77	82	75	68

Вычисление будем вести тремя знаков после запятой.

Решение. Составим расчетную таблицу полагая $n = 12, N = 12$.

i	x_i	y_i	$\cos \frac{\pi}{6} x_i$	$y_i \cos \frac{\pi}{6} x_i$	$\sin \frac{\pi}{6} x_i$	$y_i \sin \frac{\pi}{6} x_i$
1	1	70	0.866	60.620	0.500	35.000
2	2	82	0.500	41.000	0.866	71.012
3	3	85	0.000	0.000	1.000	85.000
4	4	91	-0.500	-45.500	0.866	78.806
5	5	105	-0.866	-86.600	0.500	50.000
6	6	105	-1.000	-105.000	0.000	0.000
7	7	98	-0.866	-84.868	-0.500	-49.000
8	8	89	-0.500	-44.500	-0.866	-77.074
9	9	77	0.000	0.000	-1.000	-77.000
10	10	82	0.500	41.000	-0.866	-71.012
11	11	75	0.866	64.950	-0.500	-37.500
12	12	68	1.000	68.000	0.000	0.000
$\sum$	1022			-90.898		8.232
	$a = \frac{102}{12} = 85/167$			$c = -\frac{90.898}{12} = -7.575$		$d = \frac{8.232}{12} = 0.686$

В результате получим циклически прогнозирующую функцию вида

$$y^0 = 85{,}167 - 7{,}575\cos\frac{\pi}{6}x + 0.686\frac{\pi}{6}x \qquad (6)$$

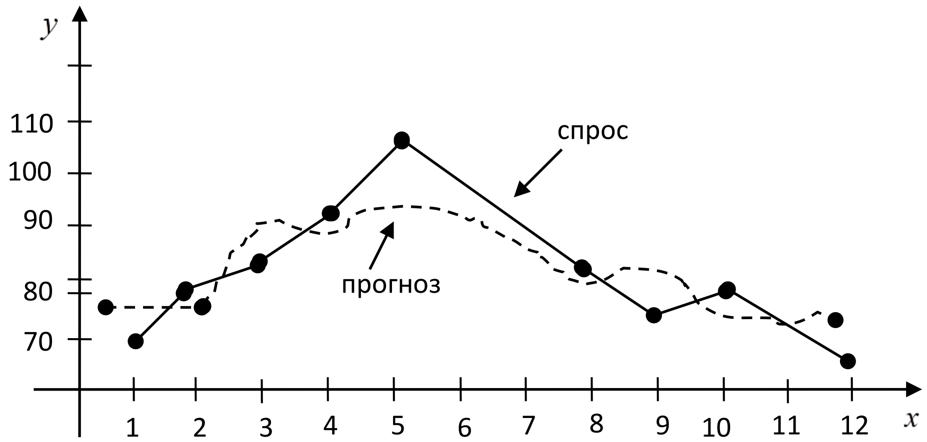
Составим контрольную таблицу

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y_i	70	82	85	91	100	105	98	89	77	82	75	68
y_i^0	78.95	81.974	85.853	89.548	92.070	92.742	91.384	88.360	84.481	80.786	78.264	71.59
$y_i - y_i^0$	-8.950	-0.026	-0.853	1.452	7.930	12.258	6.616	0.640	7.481	1.214	-3.264	9.59

Погрешность вычисления находим согласно формуле

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{12}\left(y_i - y_i^0\right)^2}{12-3}} = \sqrt{\frac{500.400}{9}} = \sqrt{55.60} = 7.457 \qquad (7)$$

Построим чертеж:



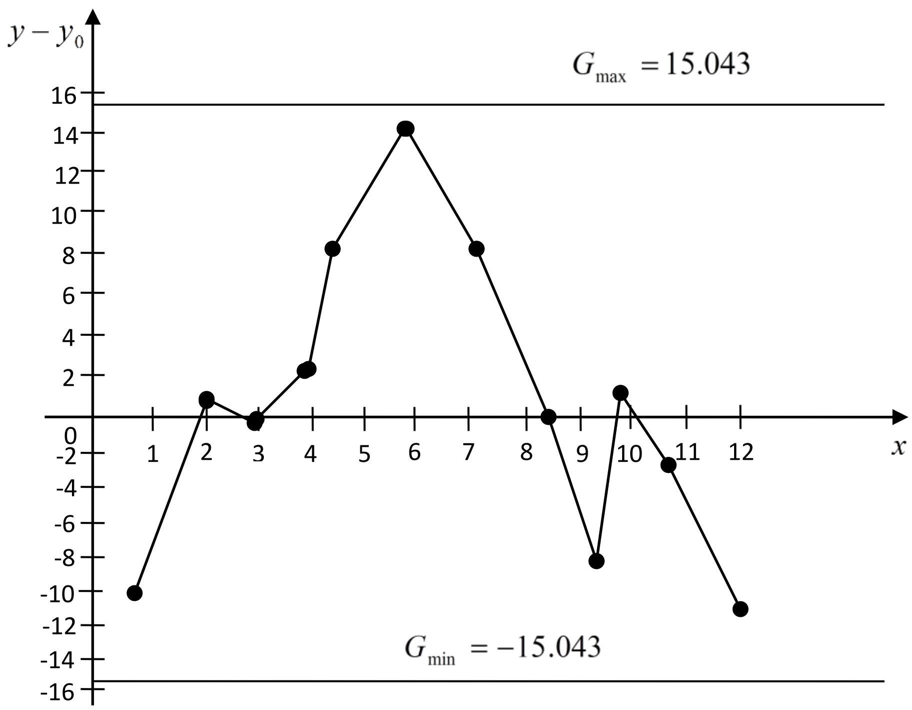
Согласно формуле (7) следует, что стандартное отклонение, характеризующее погрешность прогноза, равняется 7.457 ед. Это отклонение не гарантирует пригодность прогноза (6) для характеристики уровни спроса, так как по абсолютной величине разность $y_i - y_i^0$ для x_1, x_5, x_9, x_{12} превышает 7.457 ед.. Для определение пригодности прогноза (6), построим карты контроля, вычислив его верхние и нижние границы согласно формуле работы [1].

$$G_{\max} = +2.66\sum_{i=1}^{12}\frac{\left(y_i - y_{i-1}\right) - \left(y_i^0 - y_{i-1}^0\right)}{12-1} = +2.66\cdot\frac{62.206}{11} = 15.043$$

$$G_{\min} = -2.66\sum_{i=1}^{12}\frac{\left(y_i - y_{i-1}\right) - \left(y_i^0 - y_{i-1}^0\right)}{12-1} = -2.66\cdot\frac{62.206}{11} = -15.043$$

для x_1, x_5, x_9, x_{12} превышает 7.457 ед.. Для определения пригодности прогноза (6), построим карты контроля, вычислив его верхние и нижние границы согласно формуле работы [1].

Построим карту контроля



Из этой диаграммы следует, что нет точки вне контрольной зоны. Следовательно, прогнозирующая функция (6) может быть использована для характеристики уровня спроса. Несмотря на это, характер расположения точек внутри зоны контролируемости вызывает беспокойство, ибо точки с номерами 1, 6, 12 находятся вблизи контрольной границы.

Литература

1. Дж. Бигель . Управление производством. Издательство Мир, - М: 1973.
2. Эндрю Ф.Сигел. Практическая бизнес-статистика. Пер. с анг. –М.: Издательский дом «Вильямс», - 2002.
3. Ю.П.Грачев. Математические методы планирования экспериментов. – М.: Издательство «Пищевая промышленность»,-1979г.